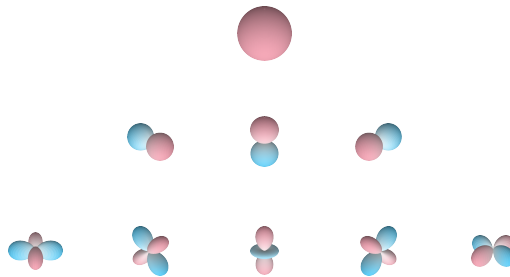


# Elektrodynamik-Crashkurs

## Aufgabenkatalog

*Angaben*



Zur Vorbereitung auf die 1. Klausur

*Autoren:*  
Theodor MÄRZ  
Lukas GRILL

*In Kooperation mit:*  
FET

---

Sommersemester 2026  
Technische Universität Wien  
*FET • I $\mu$ E • ITC*

*Basierend auf den Inhalten der LVA 360.051 Elektrodynamik.*

## Informationen zum Elektrodynamik-Crashkurs

### Ablauf

Die ist die Version des Aufgabenkatalogs mit Angaben. Nach der Anmeldung für den [Crashkurs](#) ist bis zum **17.04.2026** Zeit, sich mit den vorliegenden Aufgaben zu beschäftigen und anschließend auf der selben Website für die im Crashkurs zu behandelnden Aufgaben abzustimmen.

Der Crashkurs findet statt  
am **24.04.2026**  
um **16:30 Uhr**  
im **Hörsaal EI7**.

Nach dem Crashkurs werden die Musterlösungen der behandelten Aufgaben auf jener Website zur Verfügung gestellt.

### Aufgaben

Beachten Sie, dass dieser Aufgabenkatalog zum Teil aus weiterführenden Aufgaben bzw. Teilaufgaben besteht. Diese sind mit einem „\*“ gekennzeichnet. Es lohnt sich, diese nicht vollständig zu überspringen—häufig ist das Aufstellen eines Ansatzes hier auch lehrreich, wenngleich die Herleitung des Endergebnisses mit analytischen Schwierigkeiten verbunden sein kann.

### Danksagung

Ein besonderer Dank gilt Dr. Dominic Waldhör für die fachliche Unterstützung und das sorgfältige Durchsehen des Manuskripts. Seine wertvollen Anmerkungen haben maßgeblich zur Qualität und Korrektheit dieser Aufgabensammlung beigetragen.

## Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Vektoranalysis-Aufgaben</b>	<b>5</b>
	Globales Vektorpotential und der Satz von Stokes	7
	Globales Skalarpotential und der Gradientensatz	8
	Vektorpotential und Fluss durch ein Halbellipsoid	9
	Abgeplattete Rotationsellipsoid-Koordinaten	10
<b>II</b>	<b>Elektrostatik-Aufgaben</b>	<b>12</b>
	Von der Kreisscheibe zur Legendre-Entwicklung	14
	Multipolentwicklung einer alternierenden Kreislinienladung	15
	Separation im dreieckigen Feldgebiet	16
	Potential im segmentierten Kreiszyylinder 1	17
	Potential im segmentierten Kreiszyylinder 2	18
	Die geladene Leiterschleife in der geerdeten Kugel	19
	Die Kugelschale mit äquatorialem Potentialstreifen	20
	Transformation in zweidimensionale elliptischen Koordinaten	21
	Das Greensche Reziprozitätstheorem	22
	Der Mittelwertsatz für harmonische Funktionen	23
	Eindeutigkeit beim Neumann-Problem	24
	Eindeutigkeit bei Leitern und nichtlinearen Medien	25



Teil I

# Vektoranalysis-Aufgaben



## Aufgabe: Globales Vektorpotential und der Satz von Stokes

Gegeben sei das folgende Vektorfeld in Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = r \cos \theta \mathbf{e}_r - \frac{3}{2} r \sin \theta \mathbf{e}_\theta. \quad (1)$$

- a) Zeigen Sie, dass für dieses Vektorfeld im gesamten Raum  $\mathbb{R}^3$  ein Vektorpotential  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  existiert. Begründen Sie, warum hier keine Unterscheidung zwischen lokaler und globaler Existenz nötig ist.
- b) Bestimmen Sie ein Vektorpotential für  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  unter Verwendung des Ansatzes

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_\phi(r, \theta) \mathbf{e}_\phi. \quad (2)$$

Wählen Sie die Integrationskonstante so, dass das Vektorpotential auf der gesamten  $z$ -Achse regulär ist.

- c) Gegeben sei nun die Fläche  $\mathcal{A}$ , die durch

$$z = h \left( \exp \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right) - 1 \right), \quad z \geq 0, \quad (3)$$

mit  $h, R > 0$  beschrieben wird. Die Flächennormale sei so orientiert, dass sie im Scheitelpunkt  $(0, 0, z_0)^\top$  eine positive  $z$ -Komponente besitzt. Berechnen Sie den Fluss von  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  durch die Fläche  $\mathcal{A}$ .

*Hinweis:* Nutzen Sie die Eigenschaften des Vektorpotentials, um eine direkte und aufwändige Flächenintegration zu vermeiden.

## Aufgabe: Globales Skalarpotential und der Gradientensatz

Gegeben sei das folgende Vektorfeld in Kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$ :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 2xy \mathbf{e}_x + (x^2 + z^2) \mathbf{e}_y + 2yz \mathbf{e}_z. \quad (1)$$

- Zeigen Sie, dass für dieses Vektorfeld im gesamten Raum  $\mathbb{R}^3$  ein Skalarpotential  $\varphi(\mathbf{r})$  existiert. Begründen Sie, warum hier keine Unterscheidung zwischen lokaler und globaler Existenz nötig ist.
- Bestimmen Sie das Skalarpotential  $\varphi(\mathbf{r})$  für  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ . Wählen Sie eine etwaige Integrationskonstante so, dass  $\varphi(\mathbf{0}) = 0$  gilt.
- Gegeben sei nun die Kurve  $\mathcal{C}$ , die durch die folgende Parametrisierung in Kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$  für  $t \in [0, 1]$  beschrieben wird:

$$\mathbf{r}_{\mathcal{C}}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \cos(\pi t) \\ \frac{2t}{1+t^2} \\ t \exp(t^2 - 1) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Berechnen Sie das Wegintegral von  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  entlang dieser Kurve  $\mathcal{C}$ .

*Hinweis:* Nutzen Sie die Eigenschaften des Skalarpotentials, um eine direkte und aufwändige Wegintegration zu vermeiden.

---

## Aufgabe: Vektorpotential und Fluss durch ein Halbellipsoid

Betrachten Sie modellhaft die Oberfläche  $\mathcal{A}$  eines oberen Halbellipsoids, das in Zylinderkoordinaten  $(\rho, \phi, z)$  durch

$$\mathcal{A}: \frac{\rho^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z \geq 0 \quad (1)$$

gegeben ist, wobei  $a > 0$  und  $c > 0$  feste Skalare sind. Es ist zudem das folgende Vektorfeld in Zylinderkoordinaten gegeben:

$$\mathbf{F}(\rho, \phi, z) = \rho z \mathbf{e}_\rho + \rho^2 \mathbf{e}_\phi + (1 - z^2) \mathbf{e}_z. \quad (2)$$

- Finden Sie eine Parametrisierung von (1) in Zylinderkoordinaten  $(\rho, \phi, z)$  und bestimmen Sie anschließend den Fluss von  $\mathbf{F}$  durch  $\mathcal{A}$  mittels eines Flächenintegrals. Stellen Sie diese Fläche graphisch dar.
- Zeigen Sie zunächst, dass das Vektorfeld  $\mathbf{F}$  quellenfrei ist und bestimmen Sie ein Vektorpotential  $\mathbf{A}$  mit  $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$ .  
*Hinweis:* Verwenden Sie zur Vereinfachung den Ansatz  $A_\rho = 0$ . (Warum darf man das annehmen?)
- Berechnen Sie den Fluss von  $\mathbf{F}$  durch  $\mathcal{A}$  mittels eines Kurvenintegral über den Rand  $\partial\mathcal{A}$  der Fläche  $\mathcal{A}$ .

## Aufgabe: Abgeplattete Rotationsellipsoid-Koordinaten

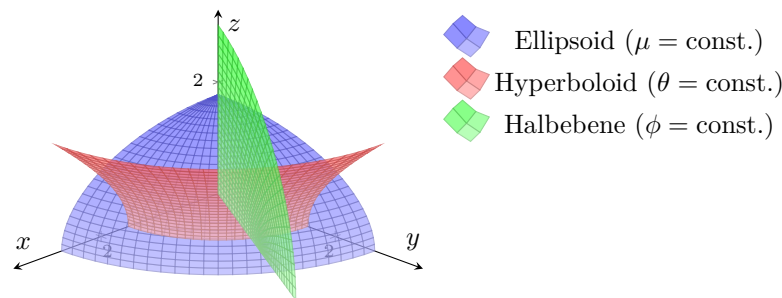
Das Koordinatensystem der abgeplatteten Rotationsellipsoide  $(\mu, \theta, \phi)$  ist durch die Transformation

$$\begin{cases} x = a \cosh \mu \sin \theta \cos \phi \\ y = a \cosh \mu \sin \theta \sin \phi \\ z = a \sinh \mu \cos \theta \end{cases} \quad (1)$$

mit dem Skalierungsfaktor  $a > 0$  definiert, wobei  $\mu \geq 0$ ,  $\theta \in (0, \pi)$  und  $\phi \in [0, 2\pi)$ .

Die zugehörigen Koordinatenflächen durch den Punkt  $\mu = 0.8$ ,  $\theta = \frac{5\pi}{18}$ ,  $\phi = \frac{\pi}{3}$  mit dem Skalierungsfaktor  $a = 2$  dargestellt.

Abgeplattete Rotationsellipsoid-Koordinaten (1. Oktant)



- Berechnen Sie zunächst die Tangentialvektoren  $\mathbf{t}_\mu = \partial_\mu \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{t}_\theta = \partial_\theta \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{t}_\phi = \partial_\phi \mathbf{r}$  und zeigen Sie durch explizite Berechnung der Skalarprodukte der Tangentialvektoren, dass dieses Koordinatensystem orthogonal ist.
- Bestimmen Sie die Maßstabsfaktoren  $t_\mu, t_\theta$  und  $t_\phi$  sowie die Einheitsvektorfelder  $\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$  des Koordinatensystems  $(\mu, \theta, \phi)$ .  
*Hinweis:* Die Identität  $\cosh^2 \mu - \sinh^2 \mu = 1$  ist hierbei nützlich.
- Der Laplace-Operator in orthogonalen krummlinigen Koordinaten  $(u_1, u_2, u_3)$  mit Maßstabsfaktoren  $t_1, t_2, t_3$  lautet allgemein

$$\Delta f = \frac{1}{t_1 t_2 t_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_i} \left( \frac{t_j t_k}{t_i} \frac{\partial f}{\partial u_i} \right), \quad (2)$$

wobei  $(i, j, k)$  eine zyklische Vertauschung von  $(1, 2, 3)$  ist. Geben Sie den Laplace-Operator  $\Delta f(\mu, \theta, \phi)$  in den abgeplatteten Ellipsoid-Koordinaten  $(\mu, \theta, \phi)$  an.



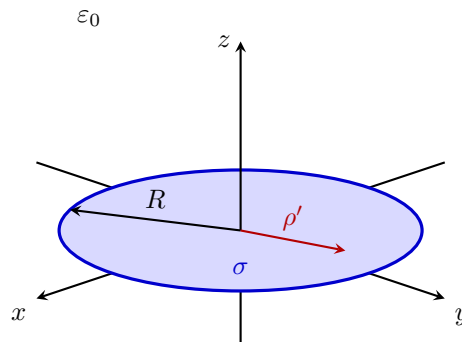
**Teil II**

**Elektrostatik-Aufgaben**



## Aufgabe: Von der Kreisscheibe zur Legendre-Entwicklung

Gegeben sei eine unendlich dünne Kreisscheibe mit Radius  $R$  und der konstanten Flächenladungsdichte  $\sigma$  in der  $xy$ -Ebene.



- a) Berechnen Sie zunächst das elektrostatische Potential  $\varphi(z)$  für einen beliebigen Punkt auf der  $z$ -Achse mit Hilfe des Coulomb-Integrals

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{A}} \frac{\sigma \, dA'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1)$$

- b) Bestimmen Sie aus dem Potential das elektrische Feld  $\mathbf{E}(z)$  auf der  $z$ -Achse. Führen Sie den Grenzübergang  $R \rightarrow \infty$  durch und interpretieren Sie das resultierende Feld physikalisch.
- c) Für ein azimutalsymmetrisches Problem lautet die allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten  $(r, \theta, \phi)$

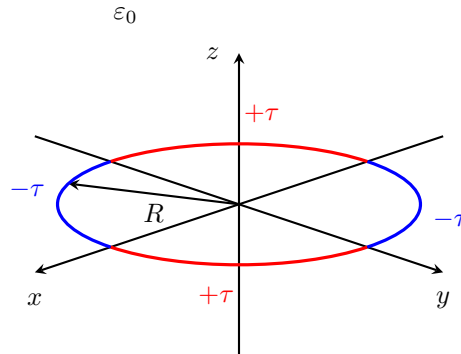
$$\varphi(r, \theta) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \left( A_l r^l + B_l r^{-(l+1)} \right) P_l(\cos \theta). \quad (2)$$

Entwickeln Sie Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe a) im Fernfeld ( $z \gg R$ ) mittels einer Taylor-Reihe bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(z^{-3})$ . Geben Sie die ersten beiden nicht-verschwindenden Terme des Potentials im gesamten Raum an.

*Hinweis:* Nutzen Sie den Fakt, dass auf der  $z$ -Achse ( $\theta = 0$  und  $\theta = \pi$ )  $P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l$  gilt, um die Koeffizienten der allgemeinen Lösungsreihe abseits der  $z$ -Achse für  $r > R$  zu bestimmen.

## Aufgabe: Multipolentwicklung einer alternierenden Kreislinienladung

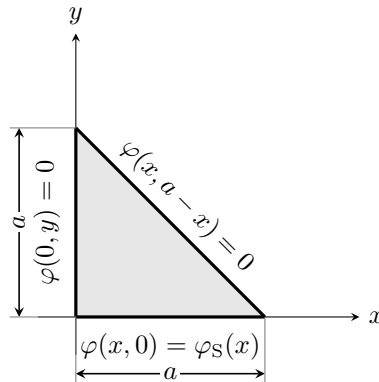
Gegeben sei eine kreisförmige Linienladung mit dem Radius  $R$  in der  $xy$ -Ebene. Die Anordnung weist abwechselnd die Linienladungsdichten  $+\tau$ ,  $-\tau$ ,  $+\tau$ ,  $-\tau$  in Viertelkreisen auf.



- Berechnen Sie das elektrostatische Potential  $\varphi(0, 0, z)$  und das elektrische Feld  $\mathbf{E}(0, 0, z)$  für Punkte auf der  $z$ -Achse.
- Bestimmen Sie alle kartesischen Multipolmomente dieser Ladungsverteilung bis zum Quadrupol-tensor  $Q_{ij}$ .
- Bestimmen Sie das Potential und das elektrische Feld in der Fernfeldnäherung ( $r \gg R$ ) basierend auf dem ersten nicht-verschwindenden Multipolmoment.

## Aufgabe: Das dreieckige Feldgebiet in der Ebene

Betrachten Sie ein ladungsfreies Gebiet in Form eines rechtwinkligen Dreiecks in der  $xy$ -Ebene. Die Katheten haben jeweils die Länge  $a$ . Das Potential auf der  $x$ -Kathete ist durch eine beliebige Funktion  $\varphi_S(x)$  vorgegeben. Auf den anderen beiden Seiten ist  $\varphi = 0$  vorgegeben.



Ein direkter Separationsansatz  $\varphi(x, y) = X(x)Y(y)$  scheitert an der schrägen Berandung.

- Konstruieren Sie eine rechteckige Ersatzanordnung durch Spiegelung des Dreiecks. Begründen Sie, wie die neuen fiktiven Randbedingungen gewählt werden müssen, damit die Hypotenuse auf dem Potential  $\varphi = 0$  verbleibt. Skizzieren Sie auch die Ersatzanordnung mit allen vier Randbedingungen.
- Formulieren Sie das Randwertproblem für das quadratische Ersatzgebiet und geben Sie den allgemeinen Separationsansatz der Laplace-Gleichung an. Passen Sie diesen anschließend den Randbedingungen an.
- Nun betrachten Sie die konkrete Verteilung für  $\varphi_S(x)$ :

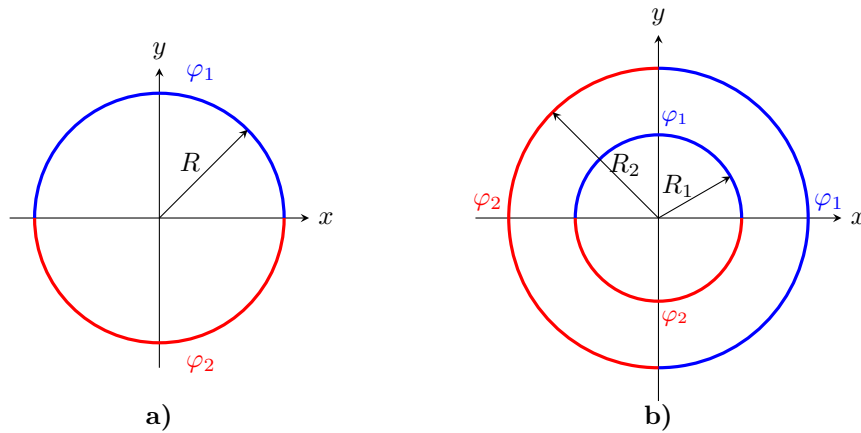
$$\varphi_S(x) = \begin{cases} \frac{2U_0}{a}x, & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{a}{2}, \\ 2U_0 - \frac{2U_0}{a}x, & \text{falls } \frac{a}{2} \leq x \leq a. \end{cases} \quad (1)$$

Bestimmen Sie für diese Potentialverteilung die Lösung in der quadratischen Ersatzanordnung. Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten analytisch und geben Sie das resultierende Potential  $\varphi(x, y)$  innerhalb des ursprünglichen Dreiecks als Reihe an.

*Hinweis:* Sie können von den Symmetrieeigenschaften von  $\varphi_S(x)$  Gebrauch machen.

## Aufgabe: Potential im segmentierten Kreiszyylinder 1

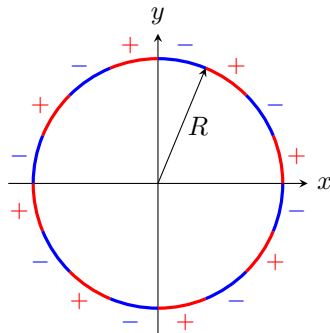
Betrachten Sie zunächst das ladungsfreie Innere eines metallischen Zylinders mit Radius  $R$ . Am Zylinderdarmantel sind die Potentiale  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  eingepreßt.



- Stellen Sie das Randwertproblem für das elektrische Potential für den in Abb. a) skizzierten Zylinderdarmantels im Innenraum auf und berechnen Sie dieses. Verifizieren Sie den Mittelwertsatz für das elektrische Potential und zeigen Sie, dass das Potential im Ursprung genau diesem entspricht.
- Betrachten Sie nun die Abb. b) und stellen Sie analog zur Teilaufgabe a) das Randwertproblem für den Zwischenraum  $R_1 < \rho < R_2$  auf. Lösen Sie anschließend das aufgestellte Problem.

## Aufgabe: Potential im segmentierten Kreiszyylinder 2

Ein unendlich langer, hohler Kreiszyylinder mit Radius  $R$  ist in  $2N$  gleich große, gegeneinander isolierte Längsstreifen unterteilt.



- Stellen Sie das Randwertproblem für den Innenraum des Zylinders auf und bestimmen Sie die allgemeine Lösung für das Potential  $\varphi(\mathbf{r})$  als unendliche Reihe. *Hinweis:* Betrachten Sie die Randbedingung als Rechteckschwingung.
- Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf des Potentials im Innenraum für verschiedene Werte von  $N$ . Diskutieren Sie, wie sich die Anzahl der Segmente auf die Eindringtiefe des Feldes in das Zentrum des Zylinders auswirkt.
- \*c) Verwenden Sie die komplexe Potenzreihe

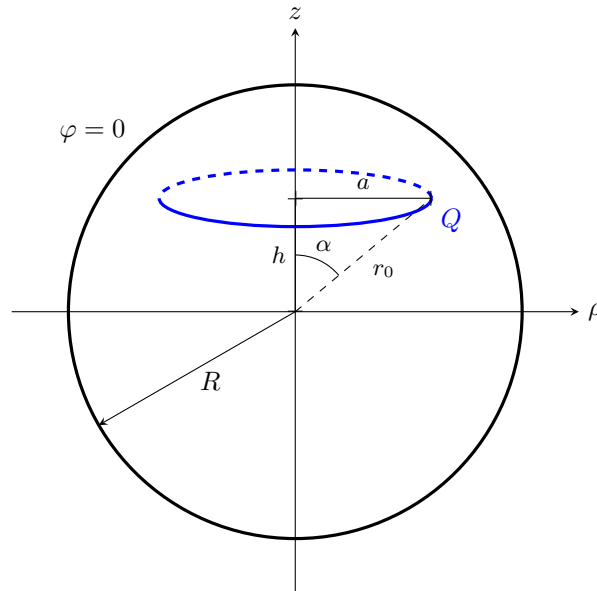
$$\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{z^k}{k} = \operatorname{artanh}(z) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+z}{1-z} \right), \quad z \in \mathbb{C}, |z| < 1, \quad (1)$$

um eine geschlossene Form des Potentials aus a) zu finden.

## Aufgabe: Die geladene Leiterschleife in der geerdeten Kugel

Betrachten Sie eine hohle und geerdete leitende Kugelschale mit dem Radius  $R$ . Im Inneren der Kugel befindet sich eine unendlich dünne, kreisförmige Leiterschleife, die eine homogene Gesamtladung  $Q$  trägt. Die Leiterschleife liegt parallel zur  $xy$ -Ebene, wobei sich ihr Mittelpunkt auf der  $z$ -Achse befindet. Ihre Position wird durch den Radius  $r_0 < R$  und den Polarwinkel  $\alpha$  beschrieben.

Um dieses Problem zu lösen, wird das Innere der Kugel in zwei ladungsfreie Teilgebiete zerlegt, die durch die Kugelschale  $r = r_0$  getrennt werden, und zwar in den Innenraum  $0 \leq r < r_0$  und Außenraum  $r_0 < r < R$ .



- Geben Sie für beide Gebiete getrennt das Randwertproblem an. Setzen Sie für beide Gebiete den allgemeinen Lösungsansatz der Laplace-Gleichung in Kugelkoordinaten an und reduzieren Sie diese entsprechend.
- Betrachten Sie nun die Grenzfläche  $r = r_0$ . Leiten Sie aus den allgemeinen Sprungbedingungen die Grenzbedingungen des Potentials für eine allgemeine Flächenladungsdichte  $\sigma(\theta)$  bei  $r = r_0$  her.
- \*c) Entwickeln Sie nun die Ladungsdichte der Ringleitung  $\sigma(\theta) = \frac{Q}{2\pi r_0^2 \sin \alpha} \delta(\theta - \alpha)$  in eine Reihe von Legendre-Polynomen und stellen Sie das Gleichungssystem für die verbleibenden Koeffizienten auf. Geben Sie abschließend das resultierende Potential für beide Gebiete an.

*Hinweis:* Die Orthogonalitätsrelation der Legendre-Polynome lautet:

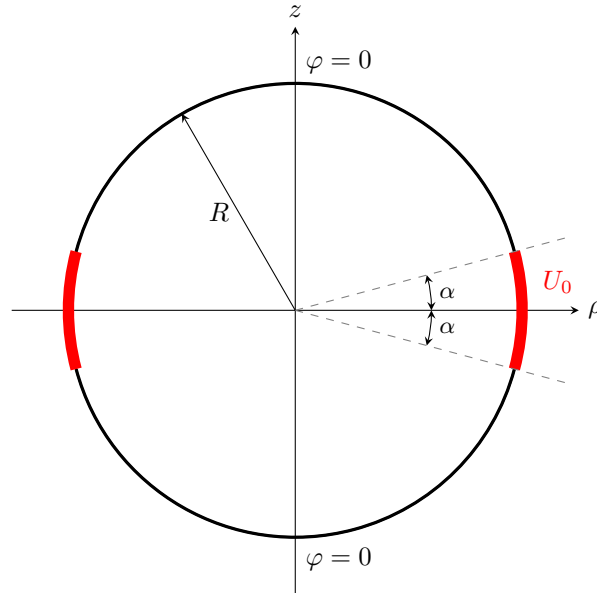
$$\int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta = \frac{2}{2l+1} \delta_{lm}. \quad (1)$$

Nutzen Sie zudem für die Delta-Distribution die Identität

$$\delta(\theta - \alpha) = \delta(\cos \theta - \cos \alpha) \sin \alpha. \quad (2)$$

## Aufgabe: Die Kugelschale mit äquatorialem Potentialstreifen

Betrachten Sie den ladungsfreien Innenraum  $r < R$  einer hohlen Kugelschale mit dem Radius  $R$ . Am Äquator befindet sich ein kreisförmiger Streifen unter dem Winkel  $2\alpha$ , mit konstantem Potential  $U_0$ . Die restliche Kugelschale liegt auf dem Potential  $\varphi = 0$ .



- a) Formulieren Sie das aufgeprägte Potential  $\varphi_S(\theta)$  an der Kugeloberfläche. Stellen Sie das zugehörige Randwertproblem für das Potential  $\varphi(\mathbf{r})$  im Innenraum ( $r < R$ ) auf. Reduzieren Sie den allgemeinen arimutalsymmetrischen Separationsansatz der Laplace-Gleichung entsprechend den Randbedingungen.
- b) Berechnen Sie die Entwicklungskoeffizienten durch Ausnutzung der Orthogonalitätsrelation (1).

$$\int_0^\pi P_l(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{2l+1}\delta_{lm} \quad (1)$$

*Hinweis:* Führen Sie im Integral die Substitution  $w = \cos\theta$  durch und nutzen Sie (2).

- c) Betrachten Sie nun eine modifizierte Variante des Streifens: Der Streifen wird entlang des Äquators  $\theta = \frac{\pi}{2}$  getrennt. Die obere Hälfte  $\theta < \pi/2$  liegt auf dem Potential  $+U_0$ , die untere Hälfte  $\theta > \pi/2$  auf dem Potential  $-U_0$ .

Wiederholen Sie die Schritte aus Teilaufgabe b) unter Ausnutzung der Beziehung für  $l \geq 1$ :

$$\int P_l(w)\,dw = \frac{P_{l+1}(w) - P_{l-1}(w)}{2l+1}. \quad (2)$$

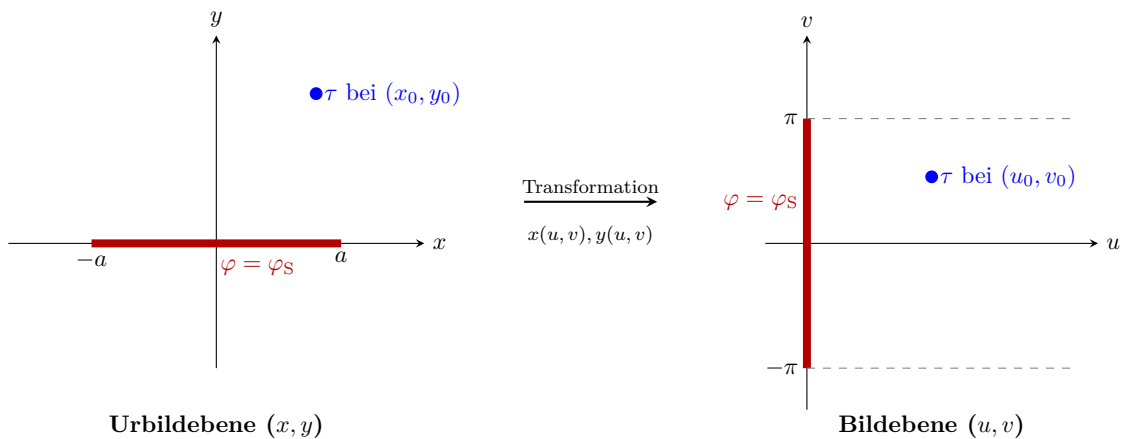
## Aufgabe: Transformation in zweidimensionale elliptischen Koordinaten

Betrachten Sie eine unendlich dünne, leitende Platte der Breite  $2a$  mit Potential  $\varphi = \varphi_S$ . Diese liegt in der  $xy$ -Ebene auf der  $x$ -Achse im Intervall  $x \in [-a, a]$  und ist in  $z$ -Richtung unendlich ausgedehnt. Im Punkt  $(x_0, y_0)$  befindet sich eine parallele Linienladung  $\tau$ .

Um dieses Problem zu lösen, führen wir elliptische Koordinaten  $(u, v)$  ein, die durch

$$\begin{cases} x(u, v) = a \cosh(u) \cos(v) \\ y(u, v) = a \sinh(u) \sin(v) \end{cases} \quad (1)$$

mit den Definitionsbereichen  $u \geq 0$  und  $v \in [-\pi, \pi)$  beschrieben sind.



- a) Zeigen Sie, dass die geerdete Platte in den neuen Koordinaten exakt der Halbebene  $u = 0$  entspricht. Berechnen Sie anschließend die Maßstabsfaktoren  $t_u = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|$  und  $t_v = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|$ . Bestimmen Sie außerdem den Laplace-Operator in den  $uv$ -Koordinaten.

- b) Betrachten Sie nun das folgende Randwertproblem: Die Linienladung wird entfernt. Stattdessen trägt die Metallplatte eine vorgegebene Gesamtladung pro Längeneinheit  $\tau$ , sowie ein konstantes (aber a-priori unbekanntes) Potential  $\varphi(0, v) = \varphi_S$ .

Stellen Sie das Randwertproblem in  $uv$ -Koordinaten auf und nutzen Sie zur Lösung den Ansatz  $\varphi = \varphi(u)$ . Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der resultierenden Differentialgleichung und berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld  $\mathbf{E}(u, v)$ . Bestimmen Sie abschließend die Integrationskonstante mithilfe der vorgegebenen Ladung  $\tau$  über den Satz von Gauß.

- \*c) Nun führen wir die Linienladung  $\tau$  wieder ein und setzen  $\varphi_S = 0$ . Man zeigt, dass das Potential einer einzelnen Linienladung  $\tau$  am Ort  $(u_0, v_0)$  in diesem in  $v$ -Richtung  $2\pi$ -periodischen Raum gegeben ist durch

$$\varphi_{\text{free}}(u, v) = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \cosh(u - u_0) - \cos(v - v_0) \right). \quad (2)$$

Konstruieren Sie mithilfe der Methode der Bildladungen die vollständige Lösung  $\varphi(u, v)$ , welche die Randbedingung  $\varphi(0, v) = 0$  auf der Platte erfüllt. Weisen Sie die Erfüllung der Randbedingung explizit nach.

## Aufgabe: Das Green'sche Reziprozitätstheorem

Betrachten Sie zwei voneinander getrennte, räumlich begrenzte Ladungsverteilungen  $\varrho_1(\mathbf{r})$  und  $\varrho_2(\mathbf{r})$  im sonst leeren Raum. Die erste Ladungsverteilung erzeugt für sich allein das elektrostatische Potential  $\varphi_1(\mathbf{r})$ , die zweite Ladungsverteilung erzeugt das Potential  $\varphi_2(\mathbf{r})$ .

- a) Beweisen Sie zunächst die zweite Green'sche Identität für zwei hinreichend glatte Skalarfelder  $f(\mathbf{r})$  und  $g(\mathbf{r})$  auf einem Volumen  $\mathcal{V}$  mit Rand  $\partial\mathcal{V}$ :

$$\int_{\mathcal{V}} (f\Delta g - g\Delta f) dV = \oint_{\partial\mathcal{V}} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\mathbf{A}. \quad (1)$$

*Hinweis:* Wenden Sie den Integralsatz von Gauß auf das Vektorfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f\nabla g - g\nabla f$  an und nutzen Sie die Produktregel für die Divergenz.

- b) Nutzen Sie die Identität aus Teilaufgabe a), um das Reziprozitätstheorem der Elektrostatik zu beweisen:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varrho_1(\mathbf{r})\varphi_2(\mathbf{r}) dV = \int_{\mathbb{R}^3} \varrho_2(\mathbf{r})\varphi_1(\mathbf{r}) dV. \quad (2)$$

Begründen Sie dabei physikalisch, warum das auftretende Oberflächenintegral verschwindet, wenn das Integrationsvolumen auf den gesamten Raum  $\mathbb{R}^3$  ausgedehnt wird.

- c) Wenden Sie das Theorem aus Teilaufgabe b) auf zwei Punktladungen an: Eine Ladung  $q_1$  befinde sich am festen Ort  $\mathbf{a}$ , eine zweite Ladung  $q_2$  am festen Ort  $\mathbf{b}$ . Die zugehörigen Ladungsdichten lassen sich durch die Dirac-Delta Distribution als  $\varrho_1(\mathbf{r}) = q_1\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$  und  $\varrho_2(\mathbf{r}) = q_2\delta(\mathbf{r} - \mathbf{b})$  schreiben.

Zeigen Sie durch Auswerten der Integrale, dass die potentielle Energie der Ladung  $q_1$  im Feld von  $q_2$  exakt der potentiellen Energie von  $q_2$  im Feld von  $q_1$  entspricht.

## Aufgabe: Der Mittelwertsatz für harmonische Funktionen

In ladungsfreien Raumgebieten ( $\rho = 0$ ) erfüllt das elektrostatische Potential  $\varphi(\mathbf{r})$  die Laplace-Gleichung  $\Delta\varphi = 0$ . Solche Funktionen nennt man harmonisch. Der Mittelwertsatz besagt, dass der Wert einer harmonischen Funktion im Zentrum einer Kugel  $\mathcal{K}_R$  exakt dem Mittelwert der Funktion auf der Kugeloberfläche  $\partial\mathcal{K}_R$  entspricht (vgl. (1)).

Zeigen Sie diesen Satz. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit legen Sie den Ursprung des Koordinatensystems in den Mittelpunkt der betrachteten Kugel, sodass  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$  gilt.

- a) Zeigen Sie zunächst allgemein die zweite Green'sche Identität für zwei Skalarfelder  $\phi(\mathbf{r})$  und  $\psi(\mathbf{r})$  in einem Volumen  $\mathcal{V}$  mit dem Rand  $\partial\mathcal{V}$ , indem Sie den Gauß'schen Integralsatz auf das Hilfsvektorfeld  $\mathbf{F} = \psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi$  anwenden.
- b) Wir betrachten eine Kugel  $\mathcal{K}_R$  mit Radius  $R$  um den Ursprung. Als Hilfsfunktion wählen wir die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung  $\psi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r}$ . Da diese im Ursprung singulär ist, schließen wir eine kleine Kugel  $\mathcal{K}_\epsilon$  mit Radius  $\epsilon < R$  um den Ursprung aus. Das Integrationsvolumen ist nun  $\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{K}_R \setminus \mathcal{K}_\epsilon$ . Begründen Sie, warum das Volumenintegral in der zweiten Green'schen Identität in  $\tilde{\mathcal{V}}$  identisch verschwindet.
- \*c) Werten Sie nun das verbleibende Oberflächenintegral über den Rand  $\partial\tilde{\mathcal{V}} = \partial\mathcal{K}_R \cup \partial\mathcal{K}_\epsilon$  aus.  
*Hinweis:* Achten Sie auf die Richtung des jeweiligen Normalenvektors auf den beiden Teilflächen  $\partial\mathcal{K}_R$  und  $\partial\mathcal{K}_\epsilon$ .
- \*d) Führen Sie nun ausgehend vom Ergebnis der Teilaufgabe c) den Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$  durch und zeigen Sie so den Mittelwertsatz

$$\varphi(\mathbf{0}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\partial\mathcal{K}_R} \varphi(\mathbf{r}) \, dA. \quad (1)$$

## Aufgabe: Eindeutigkeit beim Neumann-Problem

Ein Volumen  $\mathcal{V}$  sei mit einem linearen, inhomogenen Dielektrikum mit der Permittivität  $\varepsilon(\mathbf{r}) > 0$  und einer Raumladungsdichte  $\rho(\mathbf{r})$  gefüllt. Auf dem Rand  $\partial\mathcal{V}$  sei die Flächenladung  $\sigma_S(\mathbf{r})$  vorgegeben. Der Außenraum sei feldfrei.

- Geben Sie die partielle Differentialgleichung für das Potential  $\varphi(\mathbf{r})$  im Inneren an. Geben Sie zudem die zugehörige Randbedingung auf  $\partial\mathcal{V}$  ausgedrückt durch den Gradienten des Potentials und den nach außen gerichteten Normalenvektor  $\mathbf{n}$  an. Geben Sie auch das resultierende Randwertproblem an.
- Nehmen Sie an, es gäbe zwei verschiedene Lösungen  $\varphi_1(\mathbf{r})$  und  $\varphi_2(\mathbf{r})$ , die sowohl die Gleichung im Inneren als auch die Randbedingungen erfüllen. Formulieren Sie das Randwertproblem für das Differenzpotential  $\zeta(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) - \varphi_2(\mathbf{r})$ . Wenden Sie anschließend den Gauß'schen Integralsatz auf das Hilfsvektorfeld  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r})\zeta(\mathbf{r})\nabla\zeta(\mathbf{r})$  an. Zeigen Sie damit, dass

$$\int_{\mathcal{V}} \varepsilon(\mathbf{r}) |\nabla\zeta(\mathbf{r})|^2 dV = 0 \quad (1)$$

gelten muss.

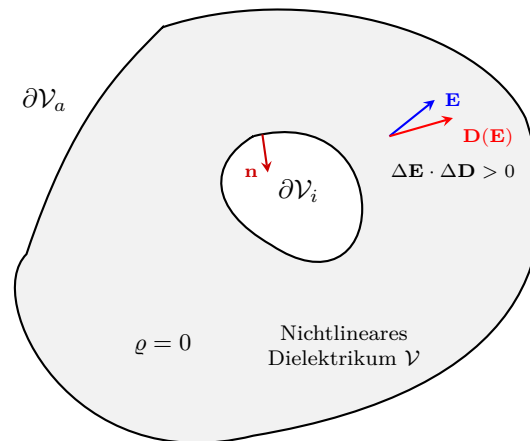
- Welche Schlussfolgerung können Sie aus (1) für das Differenzfeld  $\zeta(\mathbf{r})$ , sowie die Potentiale  $\varphi_i(\mathbf{r})$  und elektrischen Felder  $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi_i(\mathbf{r})$ ,  $i = 1, 2$  ziehen? Erklären Sie den Unterschied zur Eindeutigkeit bei einem Dirichlet-Problem.

## Aufgabe: Eindeutigkeit bei Leitern und nichtlinearen Medien

Betrachten Sie ein Raumgebiet  $\mathcal{V}$ , das von einer äußeren Hülle  $\partial\mathcal{V}_a$  umschlossen wird. Im Inneren des Gebiets befindet sich ein idealmetallischer Leiter, dessen Oberfläche mit  $\partial\mathcal{V}_i$  bezeichnet wird. Der Raum zwischen Leiter und äußerer Hülle ist gefüllt mit einem ladungsfreien, nichtlinearen und anisotropen Dielektrikum, beschrieben durch die strenge Monotoniebedingung

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) > 0, \quad (1)$$

für alle  $\mathbf{E}_1 \neq \mathbf{E}_2$ .



Auf der äußeren Hülle  $\partial\mathcal{V}_a$  sei das Potential durch die Dirichlet-Bedingung  $\varphi = \varphi_S$  vorgegeben. Der innere Leiter  $\partial\mathcal{V}_i$  trage eine fest vorgegebene Gesamtladung  $Q$  (Integrale Randbedingung), jedoch ist sein Potential  $\varphi_i$  nicht a-priori bekannt.

- Nehmen Sie zunächst an, es gäbe zwei verschiedene Lösungen  $(\varphi_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{D}_1)$  und  $(\varphi_2, \mathbf{E}_2, \mathbf{D}_2)$  für dieses Problem. Formulieren Sie die Randbedingungen für das Differenzpotential  $\zeta(\mathbf{r}) = \varphi_1(\mathbf{r}) - \varphi_2(\mathbf{r})$  auf der äußeren Hülle  $\partial\mathcal{V}_a$  sowie auf der Leiteroberfläche  $\partial\mathcal{V}_i$ .
- Zeigen Sie für die Differenz der elektrischen Flussdichte  $\Delta\mathbf{D} = \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2$ , dass der Hüllenfluss über die Leiteroberfläche verschwindet, also  $\oint_{\partial\mathcal{V}_i} \Delta\mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = 0$ .
- \*c) Betrachten Sie nun das Hilfsvektorfeld  $\mathbf{F} = \zeta\Delta\mathbf{D}$ . Wenden Sie den Gauß'schen Integralsatz auf das Volumen  $\mathcal{V}$  an und nutzen Sie die Ergebnisse aus a) und b) um zu zeigen, dass

$$\int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) dV = 0 \quad (2)$$

gelten muss.

*Hinweis:* Der Normalenvektor zeigt aus dem Volumen  $\mathcal{V}$  heraus.

- Argumentieren Sie abschließend mit der Bedingung (1), warum das elektrische Feld im gesamten Raum eindeutig bestimmt ist.